

Matematica în gimnaziu

Clasele V-VIII

**Exerciții și probleme alese
pentru juniori**

ARITMETICĂ.....	5
1. Operații cu numere întregi și zecimale. Ordinea efectuării operațiilor. Sisteme de numerație.....	5
2. Divizibilitatea numerelor. Numere prime. Descompunerea în factori. C.M.M.D.C., C.M.M.M.C. al două sau mai multe numere. Probleme.....	9
3. Frații ordinare. Compararea fracțiilor. Operații cu fracții. Frații zecimale finite și periodice. Probleme	12
4. Procente. Rădăcina pătrată. Rapoarte și proporții; proporții derivate. Probleme	18
5. Mărimi direct și invers proporționale. Regula de trei simplă; regula de trei compusă. Probleme.....	20
6. Utilizarea principiului cutiei în rezolvarea problemelor.....	21
7. Exerciții și probleme recapitulative.....	25
GEOMETRIE PLANĂ	32
1. Unghiuri. Triunghiuri. Drepte paralele.....	32
2. Cercul. Patrulater inscriptibile.....	39
3. Relații metrice. Arii.....	43
4. Probleme recapitulative și pentru cercurile de elevi.....	46
GEOMETRIE ÎN SPAȚIU	49
ALGEBRĂ	55
1. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere. Descompuneri în factori. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere	55
2. Funcții.....	69
3. Ecuații. Sisteme de ecuații.....	72
4. Ecuația de gradul II	76
5. Rezolvarea în numere întregi a ecuațiilor.....	78
6. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor. sau al sistemelor de ecuații.....	79
7. Identități.....	81
8. Inegalități.....	83
9. Diverse.....	89
RAȚIONAMENTUL ÎN MATEMATICĂ. PRINCIPII ȘI METODE.....	98
SOLUȚII	112

1. Operații cu numere întregi și zecimale
Ordinea efectuării operațiilor
Sisteme de numerație

1. Să se efectueze:

- a) $390 + 10 \cdot 3 - 3 : 3 + 1$;
- b) $10 \cdot [2 + 4 \cdot (3 + 6 : 2)]$;
- c) $2 \cdot (3200 : 100 + 16 \cdot 2 + 8 : 4)$;
- d) $5 \cdot \{1 + 9 \cdot [1 + 4 \cdot (35 + 65 : 5)]\} : 1738$;
- e) $6,56 \cdot 4,36 - 3,36 : (0,736 + 2,464) - 20,0516$;
- f) $62,92 : 5,2 - 4,2 \cdot (7 - 6,3) \cdot 3,67 - 1,2102$;
- g) $(32,24 \cdot 0,32 + 366,032 \cdot 0,1) : 2,3 - 18,6388$;
- h) $468,39 : 7,8 + (321,96 - 6,4 \cdot 0,15) : (30,8 \cdot 4,05 - 122,6) - 100,04$;
- i) $[1120,1 - 0,1 \cdot (0,2 + 20130,2 : 2,005)] : 116,08$;
- j) $(2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7)^2 : 4^{15}$;
- k) $(4^{16} : 2^{32} - 2^0) \cdot (2^4 \cdot 3^4 - 6^4)$;
- l) $(3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^9) : 3^{45}$.

2. Să se efectueze:

$$E = \left(\frac{0,749}{1,1} - \frac{5,243}{14,3} \right) \cdot \frac{23}{4,494} \cdot 11 \cdot 3,9.$$

3. Să se rezolve exercițiul:

$$E = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{6 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) : 3} + \frac{1\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} : 4 + 0,9}{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{21} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)\right] : \frac{1}{18}} - \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(3 + 3\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1\frac{2}{3} + 1\frac{4}{5}\right)}{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{45}\right] : 0,1}.$$

4. Să se arate că:

$$1_2 + 11_3 + 111_4 + 1111_5 + 11111_6 = 3311_8;$$

$$205_6 + 413_6 = 353_7.$$

5. Să se calculeze numărul:

$$N = \frac{4013_6 + 1333_4}{100_5} - 1111_2.$$

6. Să se verifice egalitățile:

$$4422_6 - 2244_6 = 5533_6 - 3355_6;$$

$$4422_7 - 2244_7 = 5533_7 - 3355_7.$$

7. Să se arate că:

$$1212_3 + 1313_4 + 1414_5 + 1515_6 + 1616_7 = 2000002_3.$$

8. Să se efectueze:

$$2^3 + 2^{10} : 2^8 \cdot 2 + 2 \cdot 2^7 : 2^5 + 2^{10} : (3 \cdot 2^5 + 2^5) - 4 \cdot 2^3.$$

9. Să se calculeze:

$$\frac{1}{0,069(4)}^*$$

10. Să se reconstituie adunarea:

$$\begin{array}{r} 1 * 5 * + \\ 4 1 * 7 \\ \hline 6 * 8 6 \end{array}$$

unde stelutele reprezintă cifre în baza zece.

11. Să se reconstituie înmulțirea:

$$\begin{array}{r} 4 6 \times \\ * * \\ \hline * * * \\ * * * \\ \hline 1 * 7 8 \end{array}$$

unde stelutele sunt cifre scrise în baza zece.

12. În fiecare din adunările:

$$\begin{array}{r} * * * + \\ * * * \\ * * * \\ \hline \square \square \square \square \end{array} \quad \begin{array}{r} * * * + \\ * * * \\ * * * \\ \hline \square \square \square \end{array}$$

stelutele reprezintă elemente distincte ale mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Fie N_1 și N_2 rezultatele acestor adunări. Să se arate că: $N_1 - N_2 \leq 1782$.

13. Să se afle numerele de forma \overline{xyzy} care au suma cifrelor egală cu 20 și adunate cu răsturnatele lor dau rezultatul 13783.

14. Să se reconstituie înmulțirea:

$$1185184 \cdot \overline{ab} = \overline{cccccc00},$$

unde a, b, c sunt cifre în baza 10, cu $a \neq 0$.

15. Câte numere naturale cuprinse între 10 și 100 se pot forma care să conțină cifra 7?

16. Produsul a două numere naturale consecutive este 18906. Să se afle numerele.

17. Produsul a două numere impare consecutive este 483. Să se afle numerele.

18. Suma a trei numere naturale diferite este 60. Știind că unul din ele este media aritmetică a celorlalte două, iar altul este diferența celorlalte două, să se afle cele trei numere.

19. Suma a trei numere pare consecutive este 744. Să se afle numerele.

20. a) Suma a 10 numere naturale consecutive este 235. Să afle numerele.

b) Suma a 7 numere pare consecutive este 112. Să se afle aceste numere.

21. Să se găsească toate perechile de numere naturale, astfel ca produsul lor să fie 576.

22. Să se găsească cel mai mic număr natural nenul care împărțit, la primele 9 numere naturale să dea tot timpul restul 1.

23. Să se afle împărțitorul când deîmpărțitul este 1042, câtul 7 și restul 6.

24. Într-o operație de împărțire, diferența dintre deîmpărțit și împărțitor este 1436, câtul 15 și restul 64. Să se reconstituie împărțirea.

25. Să se arate că numărul $N = 1977 + 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 1976)$ este un pătrat perfect.

26. Să se găsească condiția ca numărul $a \cdot \frac{\overline{aaa}}{148}$ să fie natural.

27. Să se arate că ca expresia de forma: $\overline{a4} \cdot \overline{a6} + 1$ este pătrat perfect oricare ar fi cifra a .

28. Produsul a două numere de două cifre, ambele având aceeași cifră a zecilor, este 3906. Să se afle numerele.

29. Să se arate că:

$$\frac{0,1(11)_3}{0,2(22)_4} = \frac{0,11(1)_3}{0,22(2)_4} = \frac{3}{4}.$$

30. Să se afle x din egalitatea:

$$\left\{ \left[\left(\frac{5x-3}{2} - 1 \right) - (20-12) : (5 \cdot 2^2 - 2^4) \right] - 989 \right\} - 0,5 = 6.$$

31. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{1992};$$

$$S_2 = (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + \dots + (-1)^{1992} \cdot 1992;$$

$$S_3 = (-1)^1 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 4 + (-1)^3 \cdot 6 + \dots + (-1)^{996} \cdot 1992.$$

32. Media aritmetică a 49 de numere naturale consecutive este 105. Să se afle numerele.

33. Să se arate că numărul:

$$N = \frac{2n - 1 + 3 \cdot (-1)^{n-1}}{4}$$

este întreg, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

34. Să se determine cifra a din egalitatea:

$$\frac{\overline{a2}}{41} + \frac{\overline{4a}}{8} + \frac{\overline{a2a}}{3} = 284.$$

35. Să se arate că numerele de forma:

$$\overline{66\dots6}$$

nu pot fi pătrate perfecte.

36. Să se afle un număr natural de trei cifre \overline{abc} care împărțit la 5 să dea câtul \overline{bc} și restul a .

37. Să se compare numerele:

$$A = 3^{183} \text{ și } B = 2^{307} - 2^{306} - 2^{305}.$$

38. Să se determine cifrele x, y și z , astfel ca numărul zecimal $0,xy(z2)$ să fie egal cu numărul $\frac{49}{132}$.

39. Să se determine numerele naturale x, y cu proprietatea:

$$x + y = xy.$$

40. Suma a două numere naturale este egală cu cubul primului număr.

a) Să se afle primul număr, știind că al doilea este zero.

b) Să se arate că al doilea număr este divizibil cu 6.

41. Un bazin cu o capacitate de 1976 litri este umplut într-o oră de 9 robinete cu debitul de 200 litri pe oră și respectiv 244 litri pe oră. Să se afle câte robinete sunt din fiecare.

42. În 510 sticle, unele de 1/2 litri, altele de 1 litru și al treilea fel de 1/4 litri încap 160 litri de lichid. Sticlele de 1 litru sunt de 10 ori mai puține decât cele de 1/2 litri. Câte sticle sunt din fiecare fel?

43. La un meci de fotbal un bilet pentru tribuna I costă 13 lei, iar pentru peluză 7 lei. Știind că într-o școală s-au cumpărat bilete în valoare de 143 lei, să se afle câți elevi au cumpărat bilete de 13 lei și câți de 7 lei?

44. Perimetrul unui dreptunghi este de 84 m. Dacă mărim lățimea cu 6 m și micșorăm lungimea lui cu 6 m, se obține un dreptunghi de aceeași arie. Să se afle dimensiunile dreptunghiului.

45. Trei persoane au împreună 200 lei. Primele două au împreună 110 lei, iar ultimele două 190 lei. Câți lei are fiecare persoană?

46. Suma a trei numere este 1015. Dacă din fiecare număr se scade același număr, se obțin respectiv numerele 15, 132 și 346. Care sunt cele trei numere?

47. Câte timbre a 3 lei bucata și câte timbre a 5 lei bucata s-au cumpărat cu 50 lei, știind că au fost cumpărate în total 14 timbre?

2. Divizibilitatea numerelor

Numere prime

Descompunerea în factori

C.M.M.D.C., C.M.M.M.C. al două sau mai multe numere

Probleme

1. Să se afle două numere, știind că raportul lor este $\frac{25}{7}$, iar cel mai mare divizor comun este 6.

2. Să se afle două numere, știind că produsul lor este 6300 și cel mai mare divizor comun al lor este 6.

3. Să se verifice egalitatea:

$$\frac{1800 \cdot 5600 \cdot 13000}{(2^6 \cdot 3 \cdot 13) \cdot (2^8 \cdot 5^7 \cdot 7)} = \frac{3}{8}$$

4. Să se afle două numere, știind că raportul lor este $\frac{6}{11}$, iar cel mai mic multiplu comun al lor este 1386.

5. Care este cel mai mare număr de forma \overline{abab} care să aibă cel mai mic număr de divizori?

6. Câți divizori are fiecare din numerele: 72, 100, 315, 1000?
7. Produsul a două numere consecutive naturale este 18906. Să se afle numerele.
8. Trei numere naturale înmulțite respectiv cu 5, 7 și 9 dau același rezultat. Care sunt cele trei numere, dacă produsul lor este 793800?
9. Să se afle două numere, știind că cel mai mare divizor comun al lor este 500, iar câtul lor este 0,5(6).
10. a) Să se găsească numărul natural care să fie mai mic decât pătratul său cu 1332.
b) Să se găsească trei numere naturale consecutive al căror produs să fie 5814.
11. La o competiție sportivă au participat un număr de elevi cuprins între 270 și 350. Să se afle acest număr, știind că elevii participanți se pot încolona în rânduri complete de câte 5, 6, 12 și 15 elevi.
12. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și a, b, c trei cifre fixate din această mulțime. Să se arate că oricum am alege aceste trei cifre, suma tuturor numerelor de trei cifre formate cu ele (fără repetarea vreunuia dintre ele) este divizibilă cu 111.
13. Suma a două numere întregi este 455. Câtul împărțirii celui mai mare la cel mai mic este 15 și restul 23. Să se afle cele două numere.
14. Două numere naturale sunt astfel încât diferența lor este 266, iar primul mărit cu 2 este de 8 ori mai mic decât al doilea. Să se afle cele două numere.
15. Produsul a două numere este 4851000, cel mai mare divizor comun al lor este 210, iar câtul lor $\frac{10}{11}$. Să se afle cele două numere.
16. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, expresia:
$$E = 10^n + 17$$
 se divide cu 9.
17. Să se afle numărul natural n , știind că $n - 2$ divide pe 81, iar $n + 2$ divide pe 2431.
18. Să se arate că numărul $(\overline{abcd} + \overline{dcba})^2$ este multiplu de 121.
19. Să se găsească două numere naturale, știind că diferența pătratelor lor este 1805, iar cel mai mare divizor comun al lor este 19.

20. Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Să se arate că dacă $3a + 5b$ se divide cu 17, atunci și $4a + b$ se divide cu 17.

21. Demonstrați că numărul $\overline{abab} - \overline{baba}$ se divide cu 909.

22. Să se determine restul împărțirii numărului $N = 53^m + 53^n + 1$, $m, n \in \mathbb{N}$ prin 13.

23. Să se arate că numerele de forma:

$$N = 5^{n+2} + 5^{n+1} + 5^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sunt divizibile cu 31 .

24. Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și $2a - 3b + 4c = 0$, să se arate că numărul $N = b(a - c)$ este divizibil prin 6.

25. Să se arate că numerele de forma:

$$N = 6^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^n \cdot 3^{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sunt divizibile prin 13.

26. Fie x, y, z cifre consecutive, astfel încât $\overline{xy} = z + 19$. Să se arate că \overline{xyz} este multiplu de 13.

27. Să se arate că numerele de forma: $7^{n+2} \cdot 11^{n+1} + 539$, $n \in \mathbb{N}$, se divid cu 1078.

28. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, expresia $E = 10^n + 62$ este divizibilă cu 18.

29. Să se demonstreze că numărul $N = 3^{40} - 2^{40}$ se divide prin 5.

30. Împărțind un număr la 72 s-a obținut restul 68. Dacă același număr se împarte la 24, care va fi noul rest și cum se va modifica câtul?

31. Să se afle trei numere naturale supraunitare, știind că produsul primelor două este 287, iar produsul ultimelor două este 154.

32. Să se determine toate numerele de forma \overline{abc} divizibile cu 15, astfel ca:

$$\overline{cba} - \overline{abc} = 297.$$

33. Să se afle două numere, știind că diferența dintre primul și înzecitul celui de-al doilea este 1173, iar primul împărțit la al doilea ne dă câtul 50 și restul 13.

34. Să se determine numărul natural de patru cifre a cărei descompunere în factori primi este de forma $a^5 b^5$.

35. Să se găsească toate numerele întregi n pentru care numărul $N = n^8 + 4$ este prim. Să se determine în aceste cazuri numerele N .

36. Câte fracții de forma $\frac{198y}{2x}$ sunt ireductibile, știind că numitorul este divizibil cu 5?

37. Să se arate că numărul:

$$N = 3^{9+2} \cdot 4^{9+3} + 3^{9+3} \cdot 4^{9+2}$$

este divizibil prin 63.

3. Frații ordinare

Compararea fracțiilor

Operații cu fracții

Fracții zecimale finite și periodice

Probleme

1. Să se calculeze:

$$a) \frac{\frac{1}{9} + 0,(2) + 0,(3) + 0,(4)}{0,0(1) + 0,0(2) + 0,0(3) + 0,0(4)};$$

$$b) \frac{\left[53\frac{3}{4} + 9,1(6)\right] \cdot 1,2}{\left(10\frac{3}{10} + 8,5\right) \cdot 0,(55)} - \frac{3\frac{13}{35} \cdot 5,8(3)}{3,(6) - 3,1(6)};$$

$$c) \frac{6\frac{7}{9} + 0,(5) - 0,45(3)}{0,(7) + 0,54(6) + 0,02} : 3\frac{10}{11};$$

$$d) \frac{5\frac{3}{9} - 3\frac{3}{4}}{15,8(3) : 10} + 5,(3) - \frac{3\frac{3}{4}}{1,58(3)}.$$

2. Să se afle x dacă:

$$a) \frac{1,2 : 0,375 - 0,2}{6\frac{4}{25} : 15\frac{2}{5} + 0,8} = \frac{0,016 : 0,12 + 0,7}{x};$$

$$b) \frac{0,125 \cdot x}{\left(\frac{19}{24} - \frac{21}{40}\right) \cdot 8\frac{7}{16}} = \frac{\left(1\frac{28}{63} - \frac{17}{21}\right) \cdot 0,7}{0,675 \cdot 2,4 - 0,02};$$

$$c) \frac{15,2 \cdot 0,25 - 48,51 : 14,7}{x} = \frac{\left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{6}{5}}{3,2 + 0,8 \cdot \left(5\frac{1}{2} - 3,25\right)}.$$

3. Să se afle x dacă:

$$a) 5\frac{4}{7} : \left\{ x \cdot 1,3 + 8,4 \cdot \frac{6}{7} \cdot \left[6 - \frac{(2,3 + 5 : 6,25) \cdot 7}{8 \cdot 0,0125 + 6,9} \right] \right\} = 1\frac{1}{14};$$

$$b) \frac{(2,7 - 0,8) \cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2 - 1,4) : \frac{3}{7}} + x + 8\frac{9}{11} - \frac{(1,6 + 154,66 : 70,3) : 1,9}{\left(2\frac{2}{5} - 1,3\right) : 4,3} = 2,625;$$

$$c) \frac{\left[4,625 - \frac{13}{18} \cdot \frac{9}{26} : x + (2,5 : 1,25) : 6,75 \right] : 1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2} - 0,375\right) : 0,125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0,358 - 1,4796 : 13,7)} = \frac{17}{27}.$$

4. Să se calculeze:

$$a) 6 : \frac{1}{3} - 0,8 : \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{1 : \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1 + 2,2 \cdot 10}};$$

$$b) \frac{\left(1,75 : \frac{2}{3} - 1,75 \cdot 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80} - 0,0325\right) : 400} : (6,79 : 0,7 + 0,3);$$

$$c) \frac{4,5 : \left[47,375 - \left(26\frac{1}{3} - 18 \cdot 0,75\right) \cdot 2,4 : 0,88 \right]}{17,81 : 1,37 - 23\frac{2}{3} : 1\frac{5}{6}};$$

$$d) \frac{3 : \frac{2}{5} - 0,09 : \left(0,15 : 2\frac{1}{2}\right)}{0,32 \cdot 6 + 0,03 - (5,3 - 3,88) + 0,67}.$$

5. Să se calculeze:

$$a) 1\frac{7}{20} : 2,7 + 2,7 : 1,35 + \left(0,4 : 2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(4,2 - 1\frac{3}{40}\right);$$

$$b) \left(10 : 2\frac{2}{3} + 7,5 : 10\right) \cdot \left(\frac{3}{40} - \frac{7}{30} \cdot 0,25 + \frac{157}{360}\right);$$

$$c) \frac{1}{3} : \frac{2}{3} + 0,228 : \left[\left(1,5291 - \frac{14,53662}{3 - 0,095} \cdot 0,305\right) : 0,12\right];$$

$$d) \left\{ \frac{8,8077}{20 - [28, 2 : (13, 333 \cdot 0, 3 + 0, 0001)] \cdot 2, 004} + 4, 9 \right\} \cdot \frac{5}{32};$$

$$e) \frac{\left[\left(6, 2 : 0, 31 - \frac{5}{6} \cdot 0, 9 \right) \cdot 0, 2 + 0, 15 \right] : 0, 02}{\left(2 + 1 \frac{4}{11} \cdot 0, 22 : 0, 1 \right) \cdot \frac{1}{33}}$$

6. Să se arate că:

$$E = \frac{[3, (63) + 0, (81)] \cdot 0, (142857)}{[0, 0(6) - 0, 0(5)] : 34, (396825)} = 1970.$$

7. Să se verifice egalitatea:

$$\frac{[3, (63) + 0, (81)] \cdot 0, (142857)}{[0, 0(8) - 0, 0(7)] : 34, 5(015873)} = 1976.$$

8. Să se efectueze:

$$E = \left(\frac{0, 749}{1, 1} - \frac{5, 243}{14, 3} \right) \cdot \frac{11 \cdot 3, 9}{4, 494}.$$

9. Să se calculeze:

$$E_1 = \frac{\left[1, (5) + 1 \frac{20}{45} \right] \cdot \left(2, 17 - \frac{11}{50} + 2 \frac{3}{5} \right)}{[0, 4(13) + 0, 5(86)] \cdot (\sqrt{2, 89} + \sqrt{0, 0025})} \cdot \sqrt{\frac{1225}{19881}};$$

$$E_2 = \left[0, 78 : 2, 6 + \frac{77}{90} : \left(6 - \frac{2, 3 + 5 : 6, 25}{8 \cdot 0, 0125 + 6, 1} \right) \right] : \sqrt{1 \frac{781}{900}}.$$

10. Să se calculeze numărul:

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8}.$$

11. Să se efectueze:

$$\frac{\left[\left(12 \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{4}{15} \right) : \frac{1}{15} - 6 : \frac{1}{28} \right] \cdot \frac{4}{11}}{\left(5 \cdot 2 \frac{2}{5} - 8 \frac{3}{22} \right) : 42 \frac{1}{2}}.$$